

مراجعة الأستاذ  
مقرر الميكانيك 2  
المدة ساعة ونصف

الاسم: الثالثة رياضيات

الصف: الأول 2015 - 2016

كلية العلوم  
قسم الرياضيات

أجب عن الأسئلة التالية: (ملاحظة: يفضل الرسم بالوصف)

السؤال الأول (28 درجة): اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي:

1- عزم عطالة قضيب متجانس كتلته  $M$  وطوله  $L$  بالنسبة لمحور متعلق على استقامته هو:

- (أ)  $\frac{ML^2}{3}$  ، (ب)  $\frac{ML^2}{6}$  ، (ج)  $\frac{ML^2}{12}$  ، (د) صفر ، (هـ) كل ما سبق صحيح.

2- عزم عطالة سلك دائري متجانس كتلته  $M$  ، ونصف قطره  $R$  بالنسبة لنقطة من محيطه ، هو:

- (أ)  $\frac{MR^2}{2}$  ، (ب)  $MR^2$  ، (ج)  $2MR^2$  ، (د)  $3MR^2$  ، (هـ) كل ما سبق خطأ.

3- عزم عطالة صفحة دائرية متجانسة كتلتها  $M$  ونصف قطرها  $R$  بالنسبة لنقطة من محيطها هو:

- (أ)  $\frac{MR^2}{2}$  ، (ب)  $MR^2$  ، (ج)  $2MR^2$  ، (د)  $3MR^2$  ، (هـ)  $\frac{3MR^2}{2}$

4- لتحديد موضع جسم صلب بشكل عام يكفي معرفة موضع:

- (أ) ثلاث نقاط منه ليست على استقامة واحدة ، (ب) نقطة منه ، (ج) نقطتين منه.

5- يكفي لتحديد موضع القضيب، معرفة موضع:

- (أ) نقطة واحدة منه ، (ب) نقطتين منه ، (ج) ثلاث نقاط منه.

6- يكفي لتحديد موضع الجسم الطليق في  $R^1$  ، معرفة عدد الوسطاء المستقلة، وهو:

- (أ) واحد ، (ب) اثنان ، (ج) كل ما سبق صحيح ، (د) ستة ، (هـ) تسعة.

7- يكفي لتحديد موضع الجسم الطليق في  $R^1$  ، معرفة:

- (أ) زوايا أولر ، (ب) إحداثيات نقطة منه ، (ج) الإحداثيات الثلاث لنقطة منه وزوايا أولر الثلاث.

السؤال الثاني (28 درجة): إذا كان الجسم الناقصي الصلب المتجانس منصوباً إلى جملة محاور تناظر  $Ox, y, z$ ، وأن

$a, b, c$  أطوال أنصاف محاوره، وكتلته  $M$ ، فالمطلوب:

- (1) أوجد  $I_{Ox, y}, I_{Oy, z}, I_{Oz, x}$ ، ثم أوجد  $I_{Ox, x}$  وهذا يكون إجراء أي عملية مكاملة.

- (2) أوجد  $P_{y, z}, P_{z, x}$ .

السؤال الثالث (20 درجة): إذا تحرك قرص صلب دائري نصف قطره  $R$  في المستوى الشاقولي  $OXY$  بحيث يتدحرج

بتكون انزلاق على المحور الأفقي  $OY$ ، فالمطلوب: (1) أوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتحديد موضع القرص مع الرسم

المناسب. (2) أوجد المركز الآتي لدوران القرص، وارمز له على الرسم السابق بـ  $I$ .

(3) أوجد منحنى القاعدة ومنحنى المتدحرج.

والسؤال الرابع

السؤال الرابع (24 درجة): إذا تحرك مخروط دوراني بحيث يبقى رأسه ساكناً (ثابتاً)، ويبقى محور تناظره  $OZ$  واقفاً

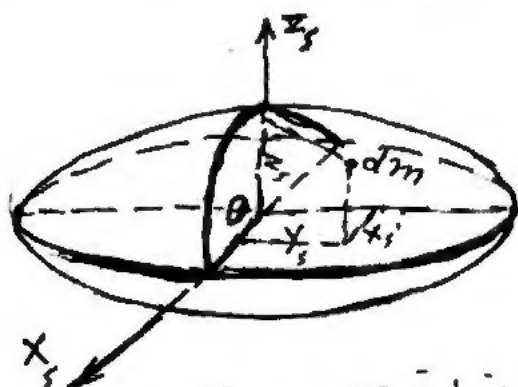
دوماً في المستوى الأفقي، فالمطلوب: (1) أوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتحديد موضع المخروط مع الرسم المناسب.

(2) أوجد كلاً من سطح مخروط القاعدة و سطح مخروط المتدحرج.

تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. كامل محمد

السؤال الأول: (1-د) و (2-ج) و (3-هـ) و (4-أ) و (5-ب) و (6-د) و (7-ج) و (8-أ).



السؤال الثاني: من الفرض محاور الجلة

المتساوية مع الجسم الناقصي هي محاور تناظره وتكون  $x_1, y_1, z_1$  كما في الشكل لذلك مهاب تلك النقطة (أو  $x_1, y_1, z_1$ ) التي يقع فيها الجسم الناقصي  $dm$ .

و لتسهيل العمل نفوم بما يلي:  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq 1$   $\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2} + \frac{c^2}{c^2} \leq 1$  وهي متباينة مجسم كروي. وهكذا نجد أن:

$$dm = \rho dv = \rho dx_1 dy_1 dz_1 = \rho \cdot a \cdot b \cdot c dx_1 dy_1 dz_1$$

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, y_1 = r \sin \theta \sin \varphi, z_1 = r \cos \theta$$

حيث:

$$0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$$

وضا حساب  $dv$  حسب  $dx_1, dy_1, dz_1$  بدلالة الإحداثيات الكروية

$$dx_1 dy_1 dz_1 = |J| dr d\theta d\varphi$$

$$J = r^2 \sin \theta$$

$$dm = \rho a \cdot b \cdot c \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

ط الجواب عزم العطالة نطلق من التعريف مستفيد مما سبق فنجد

$$I_{Ox_1 y_1} = \rho \int_V z_1^2 dx_1 dy_1 dz_1 = \rho a \cdot b \cdot c \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin^3 \theta d\varphi d\theta dr$$

$$= \rho a \cdot b \cdot c \frac{1}{5} \cdot (2) \cdot 2\pi = \rho \left(\frac{4}{3} a \cdot b \cdot c\right) \frac{c^2}{5} = \frac{M}{5} c^2$$

8

$$I_{Ox_1 z_1} = \frac{M}{5} b^2, I_{Oy_1 z_1} = \frac{M}{5} b^2$$

$$I_{Oz_1} = I_{Ox_1 z_1} + I_{Oy_1 z_1} = \frac{M}{5} b^2 + \frac{M}{5} a^2 = \frac{M}{5} (a^2 + b^2)$$

1/3

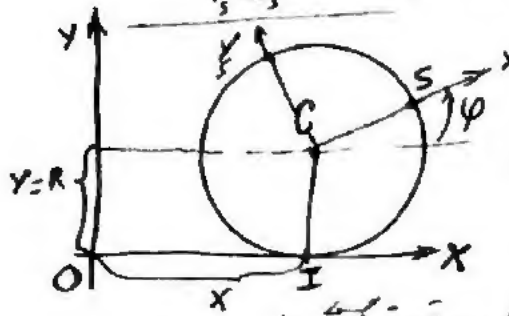
ط: بما أن  $Ox_3$  مستوى تناظر هندسي للجسم فلكل نقطة  $P$  من الجسم  
 وتكون  $(x_3, y_3, z_3)$  توجد نظيرة لها بالنسبة لهذا المستوى هي  $(x_3, -y_3, z_3)$

وبالتالي يكون

$$P_{x_3 z_3} = \int x_3 z_3 dm = \int_{V/2} x_3 z_3 dm + \int_{V/2} x_3 (-z_3) dm = 0$$

ونفس السبب نجد

$$(8) \quad P_{y_3 z_3} = \int y_3 z_3 dm = \int_{V/2} y_3 z_3 dm + \int_{V/2} y_3 (-z_3) dm = 0$$



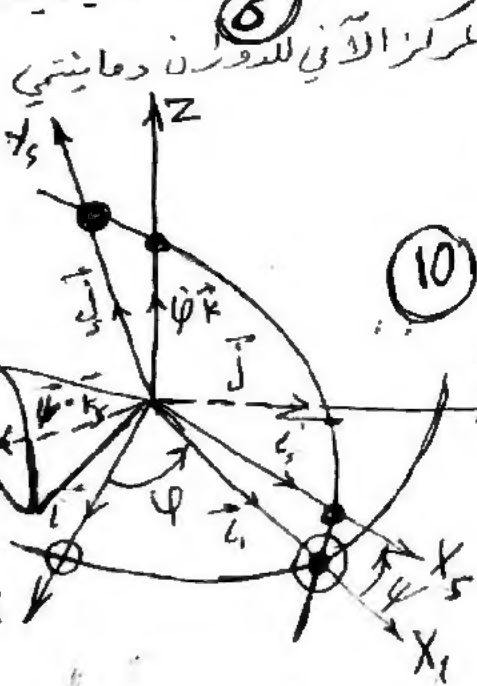
السؤال الثالث: بيان الحركة متوية فنتعين موضع  
 القرص متلاثة وسطاوي  $(x, y)$  إحداثيات  $C$  مركز القرص  
 و  $\varphi$  زاوية الدوران حول  $C$  ويمكن بيان أن القرص  
 يستدعي  $Ox$  فإن  $y=R$  كما في الشكل وبما أن تقع  
 القرص يدور بدونه انزلاقا فان سرعة كل نقطة منطقي موقع نما محيط  $\Delta$  القرص  
 مع المحور  $Ox$  الثابتة معدومة و  $\vec{v}(I) = 0$  نقطة تماس  
 و  $\vec{v}(I) = \vec{v}(C) + \vec{\omega} \times \vec{CI}$  12

وبالتالي: (عد  $x$  مرتين خطيا)

$$\vec{x} \cdot \vec{L} + R\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow$$

بما أن  $I$  نقطة تماس محيط  $\Delta$  مع  $Ox$  هي مركز آني للدوران لأن سرعتها معدومة  
 آنياً بسبب الشرع بدونه انزلاق 2

ط: إن مخني القاعدة  $Ox$  ( $y=0$ ) لأن المركز الآني للدوران لا يمكن أن ينفارده  
 إن مخني المتدحرج هو محيط القرص لأن المركز الآني للدوران دائما يتني



10

السؤال الرابع: نأخذ جملة ثابتة  $Ox_1 y_1 z_1$  فيها  $Oz_1$  شاقولي

24

ونأخذ جملة متحركة مع الخروط  $Ox_2 y_2 z_2$  فيها  
 $Oz_2$  أفقي وهو محور تناظر الخروط بالقرص  
 وبالتالي فالمستوي  $Ox_1 y_1$  شاقولي وتقع المحاور الأربعة  
 $Ox_1, Oy_1, Oz_1, Ox_2$  في  $Ox$  وبما أن الحركة تتم بنبات  
 نقطة منه هي الرأس بالقرص فهي دورانية  
 حول الرأس فتعين بسرعة زاوية  $\omega$  ولكن  
 بالقرص زاوية التآرجح ثابتة فهي  $\theta = \frac{\pi}{2}$   
 إذن يثبت بمعرفة  $Ox_1, Ox_2$   $\vec{\omega} = \omega \hat{Ox}_1$   
 $\psi = (\hat{Ox}_1 \cdot \hat{Ox}_2)$  الدوران الزاوي

حل: حسب أمثلة مركبات  $R$  فنحصل بسهولة على

$$\varphi = \psi \quad \text{و} \quad q = -\psi \cos \varphi \quad \text{و} \quad p = \psi \sin \varphi$$

ومعادلات المحاور الأني للدوران

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{\psi} \Rightarrow \frac{x}{\psi \sin \varphi} = \frac{y}{-\psi \cos \varphi} = \frac{z}{\psi}$$

وبعد في الوسيط نجد  $x^2 + y^2 = \left(\frac{\psi}{\psi}\right)^2 z^2$  وهي معادلة سطح

(7)

القاعدة د سطح مخروطي رأسه  $O$  ومحور تناظره  $Oz$ .  
ونحصل على مركبات  $R$  في  $R_3$  بسهولة باستقاط  $R$  على المحاور

$$المتماسة  $R_3$  وهي  $\varphi_s = \psi$  و  $q_s = \psi \cos \varphi$  و  $p_s = \psi \sin \varphi$$$

نحصل معادلات الأني للدوران في  $R_3$

$$\frac{x_s}{p_s} = \frac{y_s}{q_s} = \frac{z_s}{\psi_s} \Rightarrow \frac{x_s}{\psi \sin \varphi} = \frac{y_s}{\psi \cos \varphi} = \frac{z_s}{\psi}$$

وبعد في الوسيط نجد  $x_s^2 + y_s^2 = \left(\frac{\psi}{\psi}\right)^2 z_s^2$  هذه معادلة سطح مخروطي

(7)

وهو سطح مخروطي محور تناظره  $Oz_s$  . . . . .

*Handwritten signature*

3  
3